ՀՏԴ 37.02

Ֆիզիկայի և մաթեմատիկայի դասընթացում վերադրման սկիզբունքի որոշ կիրառությունների մասին*

Գագիկ Նիկողոսյան

DOI: https://doi.org/10.58726/27382923-ne2023.2-64

Հանգուցային բառեր. *խնդիր, դաշտ, հատկություն, վեկտոր, գումար, երկրաչափություն, ապացույց*

Նախաբան

Ցանկացած առարկայի, այդ թվում նաև ֆիզիկայի ու մաթեմատիկայի դասավանդման գործընթացում անհրաժեշտ է պատշաճ ուշադրություն հատկացնել այն ընդհանուր գաղափարներին և սկզբունքներին, որոնք կիրառելի են դասընթացի գրեթե բոլոր բաժիններում: Սկզբունքների հետևողական ուսուցումը ոչ միայն նպաստում է առարկայի ամբողջական ընկալմանը, այլև հնարավորություն է տալիս մի բաժնում ձեռք բերած հմտությունները վերափոխել ու կիրառել մյուս բաժնի ուսուցման գործընթացում. ավելին, երբեմն նման հնարավորություններ առաջանում են ոչ միայն ներառարկայական, այլև միջառարկայական մակարդակում, երբ մի առարկայի «զինանոցից» վերցված գաղափարը կամ սկզբունքը որոշակի իմաստով հնարավոր է լինում կիրառել նաև մեկ այլ առարկայում: Նման հնարավորությունների որոնումն ու իրացումը կարող է զարգացնել միջառարկայական կապերը և նպաստել ուսուցման որակի բարելավմանը:

Սույն աշխատանքում ներկայացնելու ենք ֆիզիկայի ընդհանուր սկզբունքներից մեկը՝ վերադրման սկզբունքը, որն ունի իր տարբեր դրսևորումները ֆիզիկայի առանձին բաժիններում: Վերադրման գաղափարի ընդհանրական բովանդակությունը վեր հանելուց հետո ներկայացնելու ենք դրա կիրառությունը ինչպես ատիճանական բարդացման սկզբունքով կազմված ֆիզիկական խնդիրների, այնպես էլ մաթեմատիկայի դասընթացի որոշ խնդիրների լուծման գործընթացում, ինչն էլ հանդիսանում է աշխատանքի գիտամեթոդական նորույթը:

Ստորև նախ կներկայացնենք վերադրման սկզբունքը ֆիզիկայում և ապա կդիտարկենք դրա կոնկրետ կիրառությունները էլեկտրադինամիկայում: Ներկայացնելու ենք էլեկտրաստատիկայի մեկ խնդրաշարք՝ այն ուղեկցելով մեթոդական բնույթի ցուցումներով: Մատնանշելու ենք էլեկ-

* *Հետազոտությունն իրականացվել է ՀՀ գիտության կոմիտեի ֆինանսական աջակցությամբ՝ 21T-5C039 ծածկագրով գիտական թեմայի շրջանակներում:*

տրադինամիկայում նմանօրինակ այլ խնդրաշարքերի կազմման հնարավոր տարբերակները: Այնուհետև, փորձելով հաստատել որոշակի համանմանություններ, սույն սկզբունքի գաղափարները տարածելու ենք երկրաչափության դպրոցական դասընթացում դիտարկվող, աստիճանական բարդացման սկզբունքով կազմված տարբեր պնդումների ապացուցման և ոչ տիպային խնդիրների լուծման վրա:

Վերադրման սկզբունքը ֆիզիկայում

Վերադրման սկզբունք ասելով ֆիզիկայում հասկանում են փորձնական ու տեսական ճանապարհներով հաստատված տարբեր կարևոր օրինաչափություններ, որոնք, ունենալով իրենց ուրույն բովանդակությունը, ունեն նաև որոշակի ընդհանրություն, ինչն արտահայտվում է առավել ընդհանուր ֆիզիկական վիճակը բնութագրող մեծության՝ մասնավոր վիճակներում նույն այդ մեծությունների նկատմամբ գծային կախվածության առկայությամբ: Նման դեպքերում, որպես կանոն, համակարգի վիճակը կամ բնութագրիչ հատկությունները միարժեքորեն նկարագրող և ի սկզբանե ներմուծվող ֆիզիկական այդ մեծությունը հանդիսանում է վեկտոր (վեկտոր եռաչափ Էվկլիդյան տարածության մեջ, երբեմն նաև սկալյար, թենզոր, հիլբերտյան տարածության վեկտոր և այլն): Համակարգը բնութագրող վեկտորական մեծության ներմուծումից հետո տարբեր դաշտերի պարագայում դիտարկվում են առանձին աղբյուրների ստեղծած դաշտերն ու համապատասխան վեկտորական մեծությունները տարածության կամայական կետում, և ապա արդյունարար դաշտը բնութագրող վեկտորական մեծությունը որոշվում է նշված վեկտորների գումարման միջոցով:

Ինչպես հայտնի է, եթե ֆիզիկական դաշտերը էքստրեմալ ուժեղ չեն, ապա դրանց բնութագրող ֆիզիկական տեսությունները սովորաբար գծային են, այսինքն՝ համապատասխան դիֆերենցիալ հավասարումները գծային են: Երբ ասում են, որ նման դաշտերի համար տեղի ունի վերադրման սկզբունքը, նկատի ունեն այն պարզ իրողությունը, որ եթե որևէ երկու ֆունկցիաներ դաշտի դիֆերենցիալ հավասարումների լուծումներ են, ապա դրանց գումարը նույնպես կլինի այդ հավասարման լուծում և կնկարագրի արդյունարար դաշտ: Օրինակ, վակուումում էլեկտրամագնիսական դաշտը բնութագրող Մաքսվելի հավասարումները գծային են, և ըստ այդմ տեղի ունի այդ դաշտերի վերադրման սկզբունքը: Գրավիտացիոն դաշտը բնութագրող Այնշտայն-Հիլբերտի հավասարումը ոչ գծային է, սակայն թույլ դաշտերի դեպքում այն գծայնանում է, և տեղի է ունենում վերադրման սկզբունքը, այսինքն՝ համակարգի ստեղծած գրավիտացիոն դաշտը հավասար է լինում համակարգը կազմող մարմինների ստեղծած դաշտերի գումարին: Համեմատաբար փոքր դեֆորմացիաների դեպքում առաձգական մարմիններում ստեղծված լարված աղեֆորմացիոն վիճակը բնութագրող հավասարումները նույնպես գծային են, և այստեղ նույնպես գործում է վերադրման սկզբունքը: Այն դեպքում, երբ ֆիզիկական տեսության հիմնական հավասարումները գծային են, վերադրման սկզբունքի բավարարումը դառնում է ակնհայտ անհրաժեշտություն: Սակայն կան դեպքեր, երբ փորձերը կամ տեսական կանխորոշումները վկայում են վերադրման մասին ու, ելնելով վերադրման սկզբունքի բավարարման անհրաժեշտությունից, համապատասխան տեսության վրա դրվում է գծային լինելու պահանջ: Օրինակ, քվանտային մեխանիկայում վիճակների վերադրման սկզբունքից կարելի է պահանջել, որ տեսության հիմնական հավասարումները (Շրեդինգերի հավասարում, Դիրակի հավասարում…) լինեն գծային: Այդ նույն պատճառով են գծային նաև քվանտային վիճակները բնութագրող բոլոր օպերատորները:

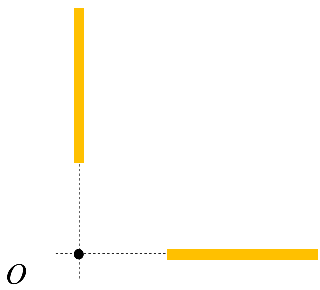
Վերադրման սկզբունքը այս կամ այն չափով կիրառվում է ֆիզիկայի գրեթե բոլոր բաժիններում: Ստորև կներկայացնենք դրա կիրառությունները ֆիզիկայի դպրոցական դասընթացի էլեկտրադինամիկա բաժնում:

Վերադրման սկզբունքի կիրառությունները էլեկտրադինամիկայում

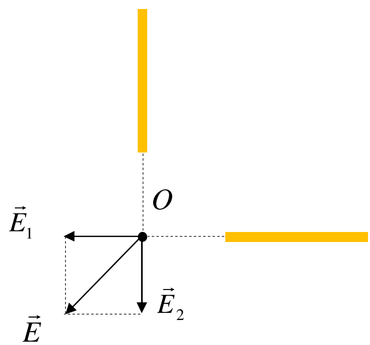
Քանի որ էլեկտրամագնիսական դաշտերի համար տեղի ունի վերադրման սկզբունքը, ապա այն գործում է՝ սկսած էլեկտրաստատիկայից մինչև էլեկտրամագնիսական ալիքներին առնչվող հարցերը: Հաշվի առնելով, որ լույսը էլեկտրամագնիսական ալիք է, և մեծ հաշվով վակուումում օպտիկական երևույթները էլեկտրամագնիսական երևույթներ են՝ պարզ է, որ պետք է դիտվեն նաև օպտիկական ալիքների վերադրման երևույթներ:

Նշենք, որ վերադրմանն սկզբունքն ունի ոչ միայն հիմնարար տեսական նշանակություն, այլև լայն ու անփոխարինելի կիրառություն կոնկրետ խնդիրների լուծման ժամանակ: էլեկտրաստատիկայում կետային լիցքի դաշտի լարվածության բանաձևի հետ մեկտեղ վերադրման սկզբունքի կիրառումը դաշտերի հաշվման հիմնական միջոցներից է: Շատ անգամ սովորողները, մեխանիկորեն կատարելով դաշտերի «գումարում», ուշադրություն չեն դարձնում վերադրման սկզբունքի կարևոր նշանակությանը: Ֆիզիկական ընդհանուր սկզբունքների կարևորությունը շեշտադրելու համար օգտակար կլինի ուշադրություն հատկացնել այն խնդիրներին, որոնք լուծվում են բացառապես դրանց կիրառման օգնությամբ: Եթե պայմանականորեն առանձնացնենք ֆիզիկայի խնդրի լուծման ֆիզիկական ու մաթեմատիկական մասերը, ապա նման խնդիրների լուծման ֆիզիկական մասը, բացի սկզբունքներից, ուրիշ ոչ մի օրենքի ու օրինաչափության կամ այլ ֆիզիկական գաղափարի կիրառում չի պահանջում: Ստորև կքննարկենք ատիձանական բարդացման սկզբունքով կազմված նման մի խնդրաշարք:

Խնդիր 1: Միևնույն լիցքով համասեռ լիցքավորված երկու միատեսակ դիէլեկտրիկ ձողերը ստեղծում են էլեկտրաստատիկ դաշտ, որի լարվածության մոդուլը O կետում E է (նկար 1): Որքա՞ն կդառնա այդ կետում դաշտի լարվածությունը, եթե ձողերից մեկը հեռացնենք:



Նկար 1. Լիցքավորված ձողերը գտնվում են միևնույն հարթության մեջ, փոխուղղահայաց են և նրանց առանցքների հատման O կետը հավասարահեռ է համապատասխան ծայրակետերից



Նկար 2. O կետում ձողերի ստեղծած էլեկտրաստատիկ դաշտերի վերադրումը

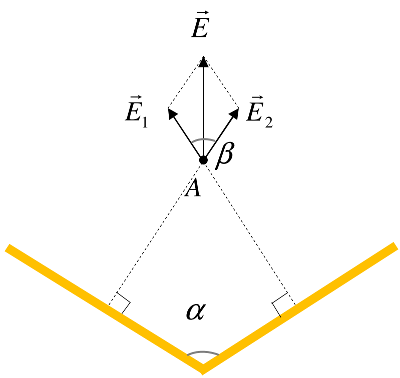
Լուծում: Դիցուք ձողերը լիցքավորված են դրականապես: Յուրաքանչյուր ձողի բոլոր մասերի լարվածությունները տվյալ կետում համուղղված են և համաձայն վերադրման սկզբունքի՝ դրանց $\vec{E}_1$ և $\vec{E}_2$ համազորները նույնպես ուղղված կլինեն համապատասխան ձողերի երկայնքով, ինչպես պատկերված է նկար 2-ում: Ձողերի միատեսակ լիցքավորված լինելուց և գծագրից ակնհայտ է, որ $E_1 = E_2 = E_0$: O կետում էլեկտրաստատիկ դաշտի լարվածությունը $\vec{E}_1$ և $\vec{E}_2$-ի վերադրման արդյունք է: Քանի որ $\vec{E}_1 \perp \vec{E}_2$ ստանում ենք

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \sqrt{2}E_0 \Rightarrow E_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}E\text{:}$$

Պարզ է, որ ձողերից մեկի հեռացման արդյունքում O կետում մնում է միայն մյուսի ստեղծած դաշտը, որի լարվածությունը E_0 է:

Ներկայացված խնդրի լուծումից հետո սովորողներին կարելի է հանձնարարել որոշել դիտարկված ձողերի ստեղծած արդյունարար դաշտը ձողերի միջնուղղահայացների հատման կետում [1, 252]: Ի տարբերություն նախորդ խնդրի՝ այս դեպքում արդեն ձողերի ստեղծած լարվածությունների ուղղությունը որոշելու համար անհրաժեշտ է օգտվել տվյալ կետի նկատմամբ լիցքերի բաշխման համաչափությունից: Ստորև կդիտարկենք ներկայացվածի և նմանատիպ մեկ այլ խնդրի [2, 253] մի փոքր ընդհանրացված տարբերակը:

Խնդիր 2: Միևնույն լիցքով համասեռ լիցքավորված երկու միատեսակ ձողերը կազմում են α անկյուն (նկ. 3): Ձողերի միջնուղղահայացների հատման կետում էլեկտրաստատիկ դաշտի լարվածության մոդուլը E է: Որքա՞ն կդառնա այդ կետում դաշտի լարվածությունը, եթե ձողերից մեկը հեռացնենք:



Նկար 3. Էլեկտրաստատիկ դաշտերի վերադրումը ձողերի միջնուղղահայացների հատման A ***կետում***

Լուծում: Կրկին որոշակիության համար կընդունենք, որ ձողերը լիցքավորված են դրական լիցքերով: Ելնելով համաչափության նկատառումներից՝ դժվար չէ պատկերացնել, որ համասեռ լիցքավորված ուղիղ ձողի միջնուղղահայացի ցանկացած կետում դաշտի լարվածությունը ուղղահայաց է ձողին և ուղղված է այդ միջնուղղահայացով: Նկար 3-ում պատկերված են լիցքավորված ձողերի ստեղծած դաշտերի լարվածությունները ձողերի միջնուղղահայացների հատման A կետում և այդ դաշտերի վերադրման արդյունքում ստացված $\vec{E}$ լարվածությունը: Գծագրից պարզ է, որ $\vec{E}_1$ և $\vec{E}_2$ վեկտորները կազմում են $\beta = 180^0 - \alpha$ անկյուն: Նախորդ խնդրի նման այս խնդրում էլ ակնհայտ է, որ դիտարկվող կետում ձողերը ստեղծում են միատեսակ մոդուլներով դաշտեր՝ $E_1 = E_2 = E_0$: Օգտվելով կոսինուսների թեորեմից՝ $\vec{E}$-ի մոդուլի համար ստանում ենք.

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2\cos(180^0 - \beta)} = 2E_0 \sin\frac{\alpha}{2}:$$

Պարզ է, որ ձողերից մեկի հեռացման արդյունքում A կետում մնում է միայն մյուս ձողի ստեղծած դաշտը, որի լարվածությունը կլինի.

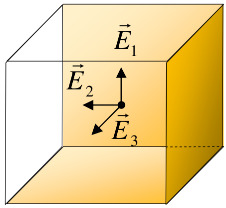
$$E_0 = \frac{E}{2\sin\alpha/2}:$$

Վերևում քննարկված խնդիրներում բաղադրիչ դաշտերի լարվածության վեկտորներն ու դրանց համազորը գտնվում էին միևնույն հարթության մեջ: Որպես այս տիպի խնդիրների զարգացում՝ հաջորդ փուլում սովորողների հետ կարելի է քննարկել եռաչափ խնդիրներ, երբ գործ ենք ունենալու լիցքերի տարածական բաշխումների ստեղծած դաշտերի լարվածության վեկտորների հետ, որոնք չեն գտնվում միևնույն հարթության մեջ: Ստորև կքննարկենք համեմատաբար պարզ մի օրինակ, որը հարմար է եռաչափ դրվածքով խնդիրների դիտարկումը սկսելու համար:

Խնդիր 3: Խորանարդի նիստերից մեկը համասեռ լիցքավորելուց հետո խորանարդի կենտրոնում էլեկտրաստատիկ դաշտի լարվածությունը դառնում է E_0: Որքա՞ն կդառնա այդ կետում դաշտի լարվածությունը խորանարդի երկրորդ, երրորդ և ապա մյուս նիստերի՝ նույն ձևով լիցքավորումներից հետո:

Լուծում: Հաշվի առնելով նախորդ խնդիրների լուծման մոտեցումներն ու ստացված արդյունքները՝ ուշադրություն կդարձնենք այս խնդրի լուծման բովանդակային մասին՝ չկրկնելով կարճ, տարրական հաշվարկները: Համաչափությունից պարզ է, որ խորանարդի յուրաքանչյուր նիստի ստեղծած էլեկտրական դաշտի լարվածությունը ուղղահայաց է այդ նիստին: Պարզ է, որ եթե երկրորդ լիցքավորված նիստը առաջինի դիմացինն է, ապա խորանարդի կենտրոնում դրանց ստեղծած դաշտերի վերադրման արդյունքում լարվածությունը դառնում է զրո: Եթե երկրորդը առաջինին կից նիստ է, ապա խորանարդի կենտրոնում դրանց դաշտերը լինում են մոդուլով հավասար և փոխուղղահայաց, ուստի դրանց համազորի մոդուլի համար հեշտությամբ կարելի է ստանալ $\sqrt{2}E_0$: Այժմ դիտարկենք այն դեպքը, երբ լիցքավորված են խորանարդի երեք նիստերը: Եթե այդ երեքից երկուսը զուգահեռ են, ապա դրանց ստեղծած արդյունարար դաշտը խորանարդի կենտրոնում զրո է, և մնում է միայն երրորդի ստեղծած E_0 դաշտը: Եթե լիցքավորված երեք նիստերի մեջ չկան միմյանց հանդիպակաց նիստեր, ապա խորանարդի կենտրոնում դրանք կստեղծեն մոդուլով հավասար, փոխուղղահայաց լարվածության վեկտորների եռյակ $\left(\left|\vec{E}_1\right| = \left|\vec{E}_2\right| = \left|\vec{E}_3\right| = E_0\right)$ (նկ. 4):

Այս դեպքում արդեն ինչպես լիցքերը, այնպես էլ դրանց ստեղծած դաշտերի լարվածությունները, չեն գտնվում միևնույն հարթության մեջ, և խնդիրը եռաչափ է: Այս դեպքում նախ գումարում ենք լարվածության վեկտորներից որևէ երկուսը և ստանում $\sqrt{2}E_0$ մոդուլով մի վեկտոր, որը ուղղահայաց է երրորդ լարվածության վեկտորին: Վերջիններիս վերադրման արդյունքում էլ արդյունարար դաշտի լարվածության համար ստանում ենք $\sqrt{3}E_0$: Երբ լիցքավորված են խորանարդի չորս նիստերը, ապա եթե դրանք զույգ հանդիպակաց նիստեր են, ապա արդյունարար դաշտը զրո է, իսկ երբ զուգահեռ են միայն երկու լիցքավորված նիստերը, ապա մյուս երկու փոխուղղահայաց նիստերի ստեղծած արդյունարար դաշտը խորանարդի կենտրոնում կլինի $\sqrt{2}E_0$: Պարզ է, որ հինգ նիստերի լիցքավորման դեպքում երկու զույգ հանդիպակաց նիստերի դաշտերը կոմպենսանում են, և մնում է միայն մի նիստի ստեղծած E_0 դաշտը, իսկ բոլոր նիստերի լիցքավորման դեպքում արդյունարար դաշտի լարվածությունը խորանարդի կենտրոնում զրո է: Այսպիսով, տարբեր քանակությամբ նիստերի լիցքավորման դեպքում խորանարդի կենտրոնում վերադրման արդյունքում առաջացած էլեկտրաստատիկ դաշտի լարվածության մոդուլը կարող է ընդունել $0, E_0, \sqrt{2}E_0, \sqrt{3}E_0$ արժեքներից մեկը:



Նկար 4. Խորանարդի երեք լիցքավորված նիստերի ստեղծած էլեկտրաստատիկ դաշտերը խորանարդի կենտրոնում

Վերը ներկայացված խնդրի քննարկումից հետո առավել պատրաստված աշակերտների հետ կարելի է քննարկել նաև տարածության մեջ լիցքերի ստեղծած դաշտերի վերադրման ավելի բարդ խնդիրներ, օրինակ՝ որոշել լարվածությունը կանոնավոր քառանիստ բուրգի կենտրոնում՝ տարբեր քանակությամբ նիստերի լիցքավորման դեպքում:

Հարկ է նշել, որ վերադրման սկզբունքը լայնորեն կիրառվում է նաև էլեկտրադինամիկայի մյուս բաժինների խնդիրների լուծման գործընթացում: Վերը դիտարկված խնդրաշարքին համանման կարելի է դիտարկել նաև մագնիսական դաշտերի վերադրման խնդիրներ: Վերադրման սկզբունքի կիրառմամբ կարելի է քննարկել նաև մի քանի աղբյուրներ պարունակող գծային շղթաների խնդիրներ՝ սկսած պարզ օրինակներից, դրանք զարգացնելով ու հասցնելով էլեկտրատեխնիկայում հետաքրքրություն ներկայացնող շղթաների դիտարկման: Կեղծ ալիքի դիտարկման հնարքի միջոցով կարելի է քննարկել նաև էլեկտրամագնիսական ալիքների տարածման, անդրադարձման ու անցման վերաբերյալ աստիճանական բարդացման սկզբունքով կազմված խնդիրների շարքեր:

Վերադրման սկզբունքի հնարավոր արդյունավետ կիրառությունները մաթեմատիկայում

Աշխատանքի առաջին մասում մանրամասն ներկայացրինք վերադրման սկզբունքի էությունը, դրա տեսական ու կիրառական նշանակությունը ֆիզիկայում և, մասնավորապես, մեկ խնդրաշարքի միջոցով վեր հանեցինք վերջինիս արդյունավետ կիրառությունը էլեկտրաստատիկայում:

Ստորև, օգտվելով վերադրման սկզբունքի էությունից և գիտական ճանաչողության հիմնական մեթոդներից մեկից, այն է՝ համանմանության մեթոդից, կառաջարկենք այլ մոտեցում մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում հանդիպող հանրահաշվական և երկրաչափական տարբեր տիպային և ոչ տիպային խնդիրների լուծման և/կամ պնդումների ապացուցման համար:

Ինչպես արդեն նշել ենք, վերադրման սկզբունքի համաձայն նախապես ներմուծում են ֆիզիկական դաշտերը բնութագրող վեկտորական մեծություններ, որից հետո առանձին աղբյուրների ստեղծած դաշտերը բնութագրող այդ վեկտորները գումարելու արդյունքում որոշում են որոնելի արդյունարար դաշտը: Այժմ վերադրման սկզբունքի այս փուլերը «տեղայնացնենք» մաթեմատիկայում՝ ապահովելով համապատասխան «գործիքակազմ»:

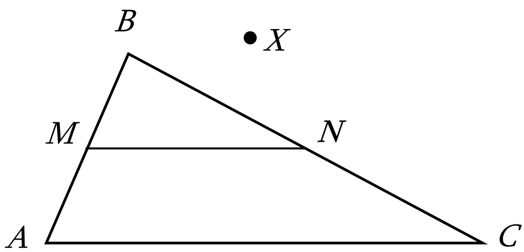
Աղյուսակ 1
Համանմանության աղյուսակ

Համանմանության «ապահովման» աղյուսակ ֆիզիկայում կիրառվող վերադրման սկզբունքի և երկրաչափության դպրոցական դասընթացից հայտնի վեկտորների գումարման եռանկյան կանոնի /վերադրման սկզբունքի «մաթեմատիկական գործիքակազմի»/ միջև	
I փուլ	
Ֆիզիկական դաշտերը նկարագրել դրանք միարժեքորեն բնութագրող վեկտորների միջոցով	*Տարածությունում երկրաչափական մարմինների կողմերի կամ առհասարակ հատվածների դիրքն ու կողմնորոշումը նկարագրել դրանք միարժեքորեն բնութագրող վեկտորների միջոցով /նկատի ունենալով վեկտորի սահմանումը՝ որպես ուղղի ուղղորդված հատված/*
II փուլ	
Ելնելով խնդրի պահանջից՝ դիտարկել տարածության որևէ կետում ֆիքսված աղբյուրների /երկու կամ ավելի/ ստեղծած դաշտերը բնութագրող վեկտորական ֆիզիկական մեծությունները, դիտարկել համապատասխան վեկտորական գումարներ ու հետագա մաթեմատիկական ձևափոխությունների արդյունքում ստանալ որոնելի մեծություն կամ ապացուցել պահանջվող պնդումը	*Ելնելով խնդրի պահանջից՝ դիտարկել տարածության որևէ կետ, ֆիքսված կետերը այդ կետին միացնող հատվածներ և դիտարկել համապատասխան վեկտորական գումարներ ու հետագա մաթեմատիկական ձևափոխությունների արդյունքում ստանալ որոնելի մեծությունը, կամ ապացուցել պահանջվող պնդումը / նկատի ունենալով վեկտորների գումարման եռանկյան կանոնը, համաձայն որի՝ տարածության կամայական A, B ֆիքսված և X ընթացիկ կետերի համար տեղի ունի՝* $\overrightarrow{AX}+\overrightarrow{XB}=\overrightarrow{AB}$ */:*

Այժմ անդրադառնանք մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում վերադրման սկզբունքի «մաթեմատիկական գործիքակազմի» հնարավոր արդյունավետ կիրառություններին: [4] աշխատանքում ցույց է տրված, որ վերադրման սկզբունքի «մաթեմատիկական գործիքակազմն» իր արդյունավետ կիրառությունն ունի հանրահաշվում, մասնավորապես մեկից ավել մոդուլ պարունակող որոշ հավասարումների / $\left|f(x)\right|+\left|g(x)\right|=\left|f(x)\pm g(x)\right|$ և/կամ վերջավոր քանակի «գումարելիների» դեպքում/ և անհավասարումների /$\left|f(x)\right|+\left|g(x)\right|\le\left|f(x)\pm g(x)\right|$; $\left|f(x)\right|+\left|g(x)\right|\ge\left|f(x)\pm g(x)\right|$ և այլն/ լուծման համար, վերադրման սկզբունքի «մաթեմատիկական գործիքակազմի» անմիջական կիրառմամբ, մշակվել և առաջարկվել է նորարար մոտեցում, ինչը հնարավորություն է տալիս նմանօրինակ դեպքերում խուսափել ավանդաբար կիրառվող միջակայքերի եղանակից:

Ստորև, վերադրման սկզբունքի «մաթեմատիկական գործիքակազմի» անմիջական կիրառմամբ, կառաջարկենք այլ մոտեցումներ երկրաչափության դպրոցական դասընթացում դիտարկվող տարբեր տիպային և ոչ տիպային խնդիրների լուծման և/կամ պնդումների ապացուցման համար:

Խնդիր 1: Ապացուցել, որ կամայական եռանկյան միջին գիծը զուգահեռ է երրորդ կողմին և հավասար է նրա կեսին [3, 11]:



Նկար 5. MN միջին գծով ABC եռանկյուն, որն ընդգրկող հարթության վրա ընտրված է կամայական X կետ

Լուծում: Դիտարկենք կամայական ABC եռանկյուն, որում տարված է MN միջին գիծը և, համաձայն վերադրման սկզբունքի «մաթեմատիկական գործիքակազմի», ABC եռանկյունն ընդգրկող հարթության վրա կամայական X կետ (նկ. 5): Համաձայն աղյուսակ 1-ի, օգտվելով նաև վեկտորների գումարման զուգահեռագծի կանոնից, ունենք՝ $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MX}+\overrightarrow{XN}=\overrightarrow{XN}-\overrightarrow{XM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}\right)-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XA}\right)=\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AC}$, նշանակի $\overrightarrow{MN}$ և $\overrightarrow{AC}$ վեկտորները համուղղված են, հետևաբար $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AC}$

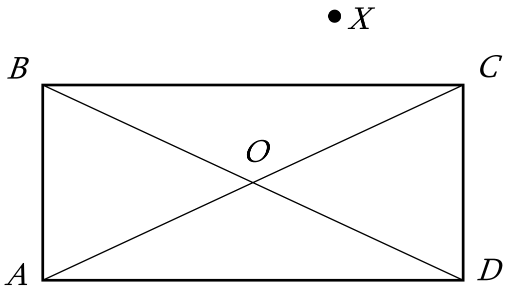
առնչությունից կունենանք՝ $MN = \frac{1}{2} AC$ և $\left|\overrightarrow{MN}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \Leftrightarrow MN = \frac{AC}{2}$, ինչն էլ պահանջվում էր ապացուցել:

Հավելենք, որ համանման մոտեցմամբ հեշտությամբ կարելի է ապացուցել, որ

ա/ կամայական սեղանի միջին գիծը զուգահեռ է սեղանի հիմքերին և հավասար է այդ հիմքերի կիսագումարին,

բ/ կամայական քառանկյան միջին գծերը /հանդիպակաց կողմերի միջնակետերը միացնող հատվածները/ և անկյունագծերի միջնակետերը միացնող հատվածը հատվում են մեկ կետում և այդ կետով կիսվում:

Խնդիր 2: Ապացուցել, որ որևէ $ABCD$ ուղղանկյան հարթությանը պատկանող կամայական X կետի՝ A և C գագաթներից ունեցած հեռավորությունների քառակուսիների գումարը հավասար է այդ կետի՝ B և D գագաթներից ունեցած հեռավորութունննեռի գումարին (նկ. 6) [5, 452]:



Նկար 6. O անկյունագծերի հատման կետով ABCD ուղղանկյուն, որն ընդգրկող հարթության վրա ընտրված է կամայական X կետ

Լուծում: Համաձայն վերադրման սկզբունքի «մաթեմատիկական գործիքակազմի», ըստ աղյուսակ 1-ի, ունենք՝

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AX} + \overrightarrow{XC} \Rightarrow AC^2 = AX^2 + XC^2 + 2\overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{XC} \Rightarrow 2\overrightarrow{XA} \cdot \overrightarrow{XC} = \\ = \left(XA^2 + XC^2\right) - AC^2:$$

Համանման ձևով կստանանք՝ $2\overrightarrow{XB} \cdot \overrightarrow{XD} = \left(XB^2 + XD^2\right) - BD^2$: Դիցուք O-ն $ABCD$ ուղղանկյան անկյունագծերի հատման կետն է (նկ. 6): Այդ դեպքում, համաձայն վեկտորների գումարման զուգահեռագծի կանոնի, կունենանք՝

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{XO} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XD} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow XA^2 + XC^2 + 2\overrightarrow{XA} \cdot \overrightarrow{XC} = XB^2 + XD^2 + 2\overrightarrow{XB} \cdot \overrightarrow{XD},$$

որտեղից, նկատի ունենալով վերոգրյալ առնչությունները, կստանանք՝

$$XA^2 + XC^2 + \left(XA^2 + XC^2\right) -$$

$$-AC^2 = XB^2 + XD^2 + \left(XB^2 + XD^2\right) - BD^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow XA^2 + XC^2 = XB^2 + XD^2,$$

ինչն էլ պահանջվում էր ապացուցել:

Հեշտ է նկատել, որ նույն կերպ համանման պնդում կարելի է ապացուցել ոչ միայն ուղղանկյան հարթությանը պատկանող կամայական X կետի համար, այլ տարածության ցանկացած կետի պարագայում:

Հավելենք, որ համանման մոտեցմամբ հեշտությամբ կարելի է ապացուցել, որ

ա) որևէ քառակուսուն ներգծած շրջանագծի կամայական կետի՝ քառակուսու գագաթներից ունեցած հեռավորությունների քառակուսիների գումարը կախված չէ այդ կետի ընտրությունից,

բ) որևէ քառակուսուն արտագծած շրջանագծի կամայական կետի՝ քառակուսու գագաթներից ունեցած հեռավորությունների քառակուսիների գումարը կախված չէ այդ կետի ընտրությունից:

Եզրակացություն

Դասավանդման տարիների փորձառությունը վկայում է, որ վերադրման սկզբունքի կիրառությունները բազմամակարդակ ֆիզիկական խնդիրների լուծման գործընթացում, ինչպես նաև մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացի որոշ տիպային և ոչ տիպային խնդիրներ լուծելիս կարող են նպաստել սովորողների ինչպես առանձին առարկայական, այնպես էլ ընդհանրական կոմպետենցիաների զարգացմանը:

Զարգացնելով վերլուծական և տրամաբանական մտածողություն՝ ուսուցման նման ձևը լրացնում է սովորողների գիտելիքների պաշարը և հարստացնում հմտությունների զինանոցը, ինչը կարող է նպաստել ինչպես ֆիզիկամաթեմատիկական առարկաների նկատմամբ նրանց հետաքրքրության աճին, այնպես էլ, առհասարակ, ուսուցման արդյունավետության և կրթության որակի բարձրացմանը:

DOI: https://doi.org/10.58726/27382923-ne2023.2-64

Գրականություն

1. Ալավերդյան Ռ. Բ., Ղազարյան Է. Մ., Մելիքյան Գ. Գ. և ուրիշ., Ֆիզիկա: Թեստային առաջադրանքների շտեմարան. - Եր.: «Էդիթ Պրինտ», 2013. մաս 1.- 429 էջ:
2. Ալավերդյան Ռ. Բ., Ղազարյան Է. Մ., Մելիքյան Գ. Գ. և ուրիշ., Ֆիզիկա: Թեստային առաջադրանքների շտեմարան. - Եր.: «Էդիթ Պրինտ», 2013. մաս 2.- 440 էջ:
3. Մանուկյան Վ., Նիկողոսյան Գ., Սերոբյան Ե., Մաթեմատիկայի և ֆիզիկայի դպրոցական դասընթացում վեկտորների որոշ կիրառությունների մասին, Գավառի պետական համալսարանի 26-րդ գիտաժողով /նվիրված համալսարանի հիմնադրման 30 ամյակին/, 5 մայիս, 2023:
4. Աթանասյան Լ. Ս., Բուտուզով Վ. Ֆ., Կադոնցև Ս. Բ., Պոզնյակ Է. Հ., Յուդինա Ի. Ի., Երկրաչափություն 8: Դասագիրք հանրակրթական դպրոցի 8-րդ դասարանի համար, Եր., «Զանգակ-97», 2007, 144 էջ:
5. Егерев В.К., Зайцев В.В., Кордемский Б.А. и др. Сборник задач по математике для поступающих во втузы /под ред. М.И. Сканави/. М.: ООО «Издательство «Мир и образование»», 2013, - 608 с.

О некоторых применениях принципа суперпозиции в курсе физики и математики

Гагик Никогосян

Резюме

Ключевые слова: *задача, поле, свойство, вектор, сумма, геометрия, доказательство*

Статья посвящена эффективному применению принципа суперпозиции в процессе обучения физике и математике. В процессе преподавания любого предмета, в том числе физики и математики, необходимо уделять должное внимание общим идеям и принципам, применимым практически ко всем разделам курса. Последовательное изучение принципов не только способствует полному пониманию предмета, но и дает возможность трансформировать и применять навыки, полученные на одном разделе, в процессе обучения другого раздела. Причем иногда такие возможности возникают не только на внутрипредметном, но и на межпредметном уровне, когда идея или принцип, взятые из «арсенала» одного предмета, могут в определенном смысле быть применены и в обучении другого предмета. Поиск и реализация таких возможностей может способствовать развитию междисциплинарных связей и повышению качества преподавания.

В данной работе, после общего изложения основной идеи принципа суперпозиции, рассматриваются его конкретные приложения в электродинамике. Представлен ряд задач электростатики, решения которых сопровождаются указаниями методического характера. Указаны возможные варианты постановки других аналогичных задач электродинамики. Пытаясь установить определенные сходства, идеи этого принципа применяются в процессе решения некоторых задач курса математики, что является основным научно-методическим новшеством работы.

On Some Applications of the Superposition Principle in the Course of Physics and Mathematics

Gagik Nikoghosyan

Summary

Key words: *problem, field, property, vector, sum, geometry, proof*

The article is devoted to the effective applications of the superposition principle in teaching physics and mathematics. In the process of teaching any subject, including physics and mathematics, it is necessary to pay due attention to the general ideas and principles applying to almost all sections of the course. Sequential study of the principles not only contributes to a complete understanding of the subject, but also makes it possible to transform and apply the skills acquired in one section in the process of teaching another section. Moreover, sometimes such opportunities arise not only at the intra-subject level, but also at the inter-subject level, when an idea or principle taken from the "source" of one subject can, in a certain sense, be applied in teaching another subject. The search and realization of such opportunities can promote the development of interdisciplinary connections and teaching quality.

In this work, after a general presentation of the main idea of the superposition principle, its specific applications in electrodynamics are considered. A *set* of electrostatics problems are presented, the solutions of which are accompanied by methodological instructions. Possible options for posing other similar problems of electrodynamics are also indicated. Trying to establish certain similarities, the ideas of this principle are applied in the process of solving some problems in a mathematics course, which is the main scientific and methodological novelty of the work.

Ներկայացվել է 07.10..2023 թ.
Գրախոսվել է 24.10..2023 թ.
Ընդունվել է տպագրության 23.11.2023 թ.